UPEC Automne 2023

Mesure et Probabilités
Travaux Dirigés 2

BUT. Rappels d'Analyse.

Exercice 1. A et B sont inclus dans $\mathbb{R}$. On définit $A\Delta B := A\cup B\backslash(A\cap B)$. Exprimer $\mathbb{1}_{A^c}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A\cup B}$ et $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.

Exercice 2. Soit $(a_n,\ n\in\mathbb{N})$ une suite croissante vers -1 et $(b_n,\ n\in\mathbb{N})$ une suite décroissante vers 1.

— Trouver la limite
$$\lim_{n\to\infty}[a_n, b_n] = \quad ?$$
— Même question si l'on suppose que $(a_n,\ n\in\mathbb{N})$ une suite convergeante vers -1, et $(b_n,\ n\in\mathbb{N})$ une suite convergeante vers 1.

Exercice 3. Soit $(A_n,\ n\in\mathbb{N})$ une suite de parties de $\mathbb{R}$.

— Si on choisit les A_n comme suit : pour tout $j\geq 1$,
$$A_{2j} = [-1, 2+1/j[, \quad \text{et} \quad A_{2j+1} = [-2+1/j, 1].$$
Déterminer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$.

— On définit maintenant les A_n autrement :
$$A_{2j} = [-j, j[, \quad \text{et} \quad A_{2j+1} =]-\infty, -j].$$
Déterminer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$.

— Existe-t-il des suites $(A_n,\ n\in\mathbb{N})$ telle que
$$\liminf A_n = [-1, 2], \quad \text{et} \quad \limsup A_n = [-1, 1]?$$

Exercice 4. Montrer que :

— $\liminf A_n \subset \limsup A_n$

— $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$

— $\limsup A_n \setminus \liminf A_n = \limsup \Big(A_n \Delta A_{n+1} \Big)$.

Exercice 5. Soit $(A_n,\ n \in \mathbb{N})$ une suite de parties de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\mathbb{1}_{\cup_{i=1}^n A_i} = \sum_i^n \mathbb{1}_{A_i} - \sum_{i<j}^n \mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathbb{1}_{A_j} + \sum_{i<j<k}^n \mathbb{1}_{A_i} \cdot \mathbb{1}_{A_j} \cdot \mathbb{1}_{A_k} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-2} \sum_{i_1<i_2<\dots<i_{n-1}}^n \mathbb{1}_{A_{i_1}} \dots \mathbb{1}_{A_{i_{n-1}}} + (-1)^{n-1} \mathbb{1}_{A_1} \cdot \mathbb{1}_{A_2} \dots \mathbb{1}_{A_n}.$$