TD1 M1S2 Probabilité, Martingale et chaîne de Markov

1.1 Marche simple sur $\mathbb{Z}$

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la marche simple sur $\mathbb{Z}$ partant de $X_0 = 0$.

1. Quelle est la loi de X_n ?
2. Appliquer le TCL à X_n, quelle est votre conclusion ?
3. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que, pour tout $\delta > 0$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{|X_n|}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} > \delta\right) = 0.$$
4. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que, pour tout $a > 0$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{|X_n|}{n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} > a\right) = 1.$$
5. Soit $R_n = \#\{k : \ 0 \leq k \leq n, \ X_k = 0\}$, donner une équivalence de $\mathbb{E}_0(R_n)$ en $n \to +\infty$.

1.2 Processus de branchement par calcul

Soit ξ une v.a. de loi $\mathbb{P}(\xi = k) = pq^k$ où $k \in \mathbb{N}$ avec $0 < p < 1$ et $q = 1-p$. Soit $(\xi_{n,j})_{n,j\geq 0}$ une famille de v.a. indépendantes de même loi que ξ. Et $\ell \geq 1$ fixé, définissons des v.a. X_n par
$$X_0 = \ell, \quad X_{n+1} = \sum_{j=1}^{X_n} \xi_{n,j}, \ \forall n \geq 1.$$

1. Quelle est la fonction génératrice $G_\xi(\theta) = G(\theta) := \mathbb{E}(\theta^\xi)$ pour $0 \leq \theta \leq 1$? En déduire $m = \mathbb{E}(\xi)$.
2. Quelle est le plus petit $\theta \geq 0$ tel que $G(\theta) = \theta$?
3. On suppose dans ce qui reste $\ell = 1$. Montrer que $G_{X_n}(\theta) = \mathbb{E}(\theta^{X_n}) = \underbrace{G \circ \cdots \circ G}_{n \text{ fois}}(\theta)$.
4. Soit $g_k(\theta) = \frac{a_k\theta+b_k}{c_k\theta+d_k}$, et $G_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$ pour $k = 1, 2$, calculer $g_1 \circ g_2(\theta)$ et G_1G_2.
5. En utilisant l'égalité suivante
$$\begin{pmatrix} 0 & p \\ -q & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{q-p}\begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & -p \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$
montrer que
$$G_{X_n}(\theta) = \frac{p\, m^n(1-\theta) + q\,\theta - p}{q\, m^n(1-\theta) + q\,\theta - p}.$$

6. Quelle est $\mathbb{P}(X_n = 0)$? En déduire la valeur de $\pi = \mathbb{P}(\exists k,\ X_k = 0)$.

7. Admettons que p.s. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{X_n}{m^n}$ existe, notons le M_∞. Supposons que $\mathbb{E}(\xi) > 1$, montrer que, pour $\lambda > 0$,
$$\mathbb{E}(e^{-\lambda M_\infty}) = \frac{p\lambda + q - p}{q\lambda + q - p}.$$

1.3 Marche biaisée sur $\mathbb{Z}$, aka ruine du joueur

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots$ une suite i.i.d. de v.a. de loi $B(1,p)$ avec $0 < p < 1$, $p \neq 1/2$ et $x \in \mathbb{Z}$ fixé, la marche biaisée sur $\mathbb{Z}$ est le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ défini par $X_0 = x$ et $X_n = x + \xi_1 + \cdots + \xi_n$ pour $n \geq 1$, sa loi est notée $\mathbb{P}_x$.

1. Quelle est la filtration canonique de $(X_n)_{n\geq 0}$? $(X_n)_{n\geq 0}$ est-elle une martingale (adapté à sa filtration canonique), ou une sur (sous) martingale ?

2. Soit $N_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\xi_k = 1}$ (et $N_0 = 0$ par convention), et posons $\mathcal{G}_n = \sigma(N_0, \ldots, N_n)$, est-ce (X_n) est adapté à la filtration $(\mathcal{G}_n)$?

3. Soit $0 < x < A$, et que
$$T = \min\{n \geq 0,\ X_n \in \{0, A\}\}$$
quelle est l'interprétation en termes de ruine du joueur de $\mathbb{P}_x(X_T = A)$? Montrer que p.s. $T < \infty$, puis calculer $\mathbb{P}_x(X_T = A)$.

4. Vous avez une fortune initiale de cent euros (et vous jouez comme le joueur dans la ruine du joueur), quelle est la probabilité que vous finissez par gagner mille euros en sortant d'un casino, avec un jeu légèrement défavorable $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = 0{,}49$?

5. Calculer $\mathbb{E}_x(T)$.

1.4 Marche simple sur $\mathbb{Z}$ et martingales

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots$ une suite i.i.d. de v.a. de loi $B(1, 1/2)$ et $x \in \mathbb{Z}$ fixé, la marche simple sur $\mathbb{Z}$ est le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ définie par $X_0 = x$ et $X_n = x + \xi_1 + \cdots + \xi_n$ pour $n \geq 1$, sa loi est notée $\mathbb{P}_x$.

1. Trouver $(m_n)_{n\geq 0}$ tel que $(X_n^2 - m_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

2. Trouver des constantes réelles λ, μ telles que $(\mathrm{e}^{\lambda X_n - \mu n})_{n\geq 0}$ est une martingale.