TD3 M1S2 Probabilité, Martingale et chaîne de Markov

3.1 Temps d'arrêt

Soit T, S deux temps d'arrêt.

1. Montrer que $T \wedge S$, $T \vee S$ sont des temps d'arrêt, que dire $S + T$, $S - 2$?
2. Rappeler la définition de la tribu du passé du temps T, notée $\mathcal{F}_T$. Montrer que $\mathcal{F}_T$ est effectivement une tribu.
3. Montrer que si $T = k$ où $k \in \mathbb{N}$ une constante, alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_k$.
4. Montrer que, $A \in \mathcal{F}_T$ si et seulement si $\forall n \geq 0,\ A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.
5. Montrer que $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.
6. Montrer que $\{S < T\} \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$, et $\{S = T\} \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$.
7. Soit X une v.a.r. intégrable et $n \in \mathbb{N}$, montrer que
$$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_T)\mathbb{1}_{T=n} = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)\mathbb{1}_{T=n}.$$
8. Soit X une v.a.r. intégrable, montrer que
$$\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{T'}) \,\Big|\, \mathcal{F}_T\Big) = \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_T) \,\Big|\, \mathcal{F}_{T'}\Big) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{T\wedge T'}).$$

3.2 Tribu du temps d'arrêt

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ avec incrément ξ_i. Supposons que $X_0 = 0$ et posons $T = \inf\{n \geq 0 :\ X_n = -10\}$, $A = \{\exists n \geq 0,\ X_n = 10\}$. Notons $(\mathcal{F}_n)$ la filtration canonique de X.

1. Montrer que T est $\mathcal{F}_T$ mesurable.
2. Montrer que $A \notin \mathcal{F}_T$.
3. Considérons la marche arrêtée, $Y_n = X_{n\wedge T}$, et notons $(\mathcal{G}_n)$ la filtration canonique de Y.
   (a) Montrer que $T' = \inf\{n \geq 0 :\ Y_n = -10\}$ est un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{G}_n)$.
   (b) Montrer que $B = \{\exists n \geq 0,\ Y_n = 10\}$ est dans $\mathcal{G}_{T'}$.

3.3 Rouge ou noir multiplicative

On joue le rouge ou noir avec une fortune initiale de 1, à chaque tour on met tout, si on gagne (avec probabilité 1/2) alors notre fortune est multipliée par 2, si on perd elle est divisée par 2 de sorte qu'on n'aura jamais tout perdu. Si on arrive à 64, on arrête de jouer. En utilisant l'inégalité maximale de Doob, donner une borne supérieure pour la probabilité que l'on arrête le jeu au 15ème tour ou avant.

3.4 Solitaire de cadenas

Supposons qu'on a n boîtes numérotées $1, \dots, n$, chaque avec un cadenas avec une clé unique. On prend celle de la boîte 1, puis met les autres clés aléatoirement dans les n boîtes et les verrouille après. Les clés sont distribuées uniformément et indépendamment.

La clé 1 peut ouvrir la boîte 1, et si cette boîte contient une ou plusieurs clés, on peut continuer à ouvrir les autres boîtes (une par une), c'est le principe du solitaire de cadenas, on gagne si toutes les boîtes sont ouvertes.

Le but de cet exercice est de montrer que la probabilité p de gagner le solitaire est $1/n$. Au temps 1, $n-1$ clés sont dans les boîtes, n boîtes sont verrouillées, à chaque instant on ouvre une boîte (ou 0 si on n'a plus de clés).

1. Soit T le temps où on ne peut plus jouer le solitaire ou on a gagné. Montrer que T est un temps d'arrêt borné.

2. Si on met k clés uniformément et indépendamment dans ℓ boîtes, quelle est la loi du nombre de clés dans la boîte 1 ?

3. Soit H_k le nombre de clés dans les boîtes verrouillées divisé par le nombre de boîtes verrouillées au temps k, montrer que $(H_{k \wedge T})_{k \geq 1}$ est une martingale. *La filtration étant celle naturelle associée au temps de cette expérience aléatoire.*

4. Utilisant le théorème d'arrêt borné pour conclure que $p = 1/n$.

3.5 Autre démonstration de l'inégalité maximale

Soit (X_n) une sous-martingale, et S_1, S_2 deux temps d'arrêt bornés tels que $S_1 \leq S_2 \leq N$ pour certain N déterministe.

1. En considérant la famille prévisible
$$H_n = \mathbb{1}_{S_1 < n \leq S_2}, \ n \geq 1,$$
calculer $(H \cdot X)_N$.

2. En déduire que $(H \cdot X)_n$ est une sous-martingale et en déduire que $\mathbb{E}(X_{S_1}) \leq \mathbb{E}(X_{S_2})$.

3. Appliquer 2) aux temps d'arrêt $T \wedge n$ et n, en déduire que $\mathbb{E}(X_{T \wedge n}) \leq \mathbb{E}(X_n)$.

4. Soit $r > 0$ et $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \geq r\}$, quel est l'événement $A = \{T \leq n\}$ en terme de (X_n)?

5. En justifiant $X_{T \wedge n} \geq r\mathbb{1}_A + X_n \mathbb{1}_{A^c}$, montrer que
$$\mathbb{E}(X_n) \geq r\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{A^c}).$$

6. En déduire l'inégalité maximale de Doob:
$$r\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq k \leq n} X_k \geq r\right) \leq \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{\left\{\max\limits_{0 \leq k \leq n} X_k \geq r\right\}}\right] \leq \mathbb{E}(X_n^+).$$