TD4 M1S2 Probabilité, Martingale et chaîne de Markov

4.1 Marche simple arrêtée

Soit $N \in \mathbb{N}$ et (X_n) la marche simple sur $\mathbb{Z}$, partant de 0, et T le temps aléatoire

$$T = \inf\{n \geq 0 : \ |X_n| = N\}$$

1. Montrer que T est un temps d'arrêt.
2. Quelle est la décomposition de Doob de $(X_n^2)_{n\geq 0}$?
3. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $T_k = T \wedge k$, montrer que $\mathbb{E}(X_{T_k}^2) = \mathbb{E}(T_k)$.
4. En appliquant le théorème de convergence monotone, montrer que
$$\mathbb{E}(T) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}(X_{T_k}^2)$$
5. En déduire que, X_T est bien définie (i.e. $T < \infty$ p.s.), et que, $X_{T_k} \to X_T$ presque-sûrement, puis en utilisant convergence dominée, montrer que $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X_T^2)$.

4.2 Stratégie de Samouraï

Un samouraï entre dans un casino avec une somme d'argent de valeur $x = 10$ (dans une unité monétaire). Il a décidé de jouer à la roulette jusqu'à soit tout perdre, soit gagner une somme $A = 100 > x$. Il ne joue que rouge ou noir, et lorsqu'il mise m il gagne m avec une probabilité $p \leq 0,5$, sinon il perd sa mise. (À la roulette il y a une case verte sur 37, si bien que la vraie probabilité p est 18/37).

1. Un paysan joue à la même table avec la même fortune initiale. Supposons que sa fortune à l'instant n est désignée par X_n avec $X_0 = x$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Il mise 1 à chaque instant. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sur-martingale.
2. Le samouraï mise à chaque fois sur la même couleur que le paysan, Y_n désigne sa fortune à l'instant n, sauf que, lorsque $Y_n \geq A/2$, il mise $A - Y_n$, lorsque $Y_n \leq A/2$, il mise Y_n, exprimer Y_n comme une sur-martingale transformée de X_n, et justifier que c'est effectivement une sur-martingale.
Un résultat que nous démontrerons peut-être dans la suite du cours ou du TD établit que la stratégie du samouraï est optimale, dans le sens où le bilan financier est meilleur que pour tout autre joueur qui joue jusqu'à gagner A ou perdre la totalité de son argent.

4.3 Marche simple tuée en 0

Soit $Y_n = 1 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$ une marche simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 1, et

$$T = \inf\{n \geq 0 : \; Y_n = 0\}.$$

1. Montrer que T est un temps d'arrêt et Y_n une martingale.
2. Montrer que $X_n = Y_{n \wedge T}$ est une martingale positive.
3. Montrer que X_n converge p.s. vers X_∞ et $X_\infty < \infty$ p.s.
4. Est-ce la convergence a lieu dans L^1 ?