TD8 M1S2 Probabilité, Martingale et chaîne de Markov

8.1 Transformation d'une chaîne de Markov

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène sur $E = \{1,2,3\}$ de loi initiale $1/2(\delta_1 + \delta_3)$ et de matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On définit la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geq 0}$ par

$$Y_n = \mathbb{1}_{\{3\}}(X_n).$$

1. Dessiner le graphe de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$, c'est-à-dire le graphe dont l'ensemble de sommets est E et tel que $\{x, y\}$ est une arête ssi $Q(x, y) > 0$.

2. Montrer que, à un ensemble négligeable près,

$$\{Y_0 = 0 \text{ et } Y_1 = 0\} = \{X_0 = 1 \text{ et } X_1 = 1\} \text{ et}$$
$$\{Y_0 = 1 \text{ et } Y_1 = 0\} = \{X_0 = 3 \text{ et } X_1 = 2\}.$$

3. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une chaîne de Markov.

8.2 Transformation des chaînes de Markov

Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov homogène sur E et de transition P.

1. Soit F un ensemble, et $f : E \to F$ bijective. Est-ce que $(f(X_n))_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur F ? Si oui, quelle est sa matrice de transition ?

2. Soit T une v.a. géométrique de paramètre $0 \leq p < 1$, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}[T = k] = p(1-p)^{k-1}, \text{ pour tout } k \geq 1.$$

   Montrez que T satisfait la propriété d'absence de mémoire :

$$\mathbb{P}[T > n + k \mid T > k] = \mathbb{P}[T > n].$$

3. On rajoute à E un point extérieur ∂ pour former $\widetilde{E} = E \cup \{\partial\}$. Soit T une v.a. géométrique de paramètre $0 \leq p < 1$, indépendant de X. Soit Y_n défini par

$$Y_n = \begin{cases} X_n & n < T \\ \partial & n \geq T \end{cases}$$

   $(Y_n)_{n\geq 0}$ est-elle une chaîne de Markov homogène sur $\widetilde{E}$? Et si oui, expliciter sa matrice de transition. Que dire si on remplace T par $T + 2$?

4. Même question (i.e. est-ce une chaîne de Markov ?) pour $Y = (Y_n)_{n\geq 1}$ avec $Y_n = X_n + X_{n-1}$, et $Z = (Z_n)_{n\geq 1}$ avec $Z_n = (X_n, Y_n)$, dans le cas où $(E, +)$ est un groupe commutatif.

8.3 Indépendant du passé

Soient X la marche simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 0 et

$$T = \inf\{n \geq 1,\ X_{n+1} - X_n = X_1\}.$$

1. Montrer que la v.a. X_T est bien définie et que $(X_{T+n} - X_T)_{n\geq 0}$ est aussi une marche simple issue de 0.

2. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration canonique liée au processus X, c'est-à-dire $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ pour tout $n \geq 0$. T est-il un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$?

8.4 Marche biaisée sur $\mathbb{Z}$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche biaisée sur $\mathbb{Z}$, partant de 1, et vérifiant

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1) = p, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n - 1) = q = 1 - p.$$

Soit $T = \inf\{n \geq 0 :\ X_n = 0\}$.

1. Supposons que $p < 1/2$, montrer que l'espérance de T est finie et que

$$\mathbb{E}(T) = 1 + 2p\mathbb{E}(T).$$

   En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T)$.

2. Montrer que T est d'espérance infinie dans le cas $p > 1/2$ et $p = 1/2$.