TD9 M1S2 Probabilité, Martingale et chaîne de Markov

9.1 L'espace canonique d'une chaîne

Soit E un espace au plus dénombrable, on prend $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ et les applications coordonnées $X_n : \Omega \to E,\ \omega \mapsto \omega_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. On munit Ω de la tribu $\mathcal{F}$, la plus petite qui rende mesurables les applications coordonnées X_n, montrer que $\mathcal{F}$ est engendrée par les cylindres, c'est-à-dire les

$$C = \{\omega \in \Omega :\ \omega_0 = x_0, \ldots, \omega_n = x_n\}$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$.

2. On conviendra que $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)$ désigne l'espace canonique de la chaîne partant de x et de transition Q. Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une (autre) chaîne de Markov partant de x et de transition Q (définie éventuellement sur un autre espace de proba $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}'_x)$), montrer que, pour tout $B \subset E^{\mathbb{N}}$ mesurable, on a

$$\mathbb{P}'_x((Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B) = \mathbb{P}_x((X_n) \in B)$$

3. En utilisant le théorème de la propriété de Markov simple dans l'espace canonique (où $\mathbb{E}_x$ est l'espérance sous $\mathbb{P}_x$ de l'espace canonique) : pour tout $F, G : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mesurables, telles que F est $\sigma(X_0, \ldots, X_n) := \mathcal{F}_n$-mesurable, on a

$$\mathbb{E}_x\left[F \cdot G \circ \theta_n\right] = \mathbb{E}_x\left[F \mathbb{E}_{X_n}(G)\right];$$

Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ satisfait également la propriété de Markov simple. *Commencer par donner un sens à cette propriété, comme par exemple, pour tout Z bornée et $\sigma(Y_n, Y_{n+1}, \ldots)$-mesurable*

$$\mathbb{E}'_x(Z \mid Y_0, \ldots, Y_n) = \mathbb{E}'_x(Z \mid Y_n).$$

En fait, n'importe quelle propriété en loi vraie pour $(X_n)_{n\geq 0}$ reste vraie pour $(Y_n)_{n\geq 0}$.

9.2 Temps de couverture sur le cercle

Soit $(X_m)_{m\geq 0}$ la marche simple sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ partant de 0. Soient Y le dernier site de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ visité par la marche et $T_k := \inf\{m \geq 0 : X_m = k\}$.

1. Justifier que la v.a. Y est bien définie.

2. Montrer que $\{T_{k-1} < T_k\} = \{Y \in \{k, k+1, \ldots, n-1\}\}$.

3. Soit $\widetilde{X}_m := -X_m$, pour tout $m \geq 0$. Montrer que le processus $(\widetilde{X}_m)_{m\geq 0}$ est aussi une marche simple sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ partant de 0.

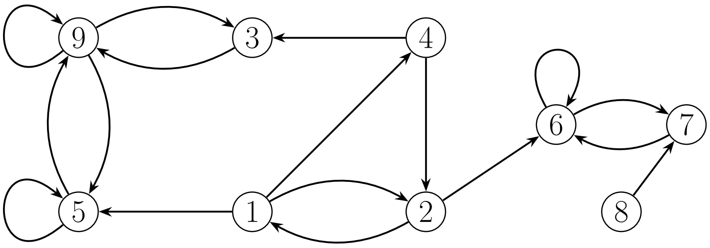
4. Montrer que $\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(Y=n-1)$.

5. En utilisant le temps d'arrêt $T_{k-1}\wedge T_{k+1}$ et sans faire de calcul, montrer que $\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(Y=1)$, pour tout $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$.

6. En déduire la loi de Y.

7. Quelle est la probabilité que X touche $k-1$ avant k, pour $k\in\{1,\ldots,n-1\}$?

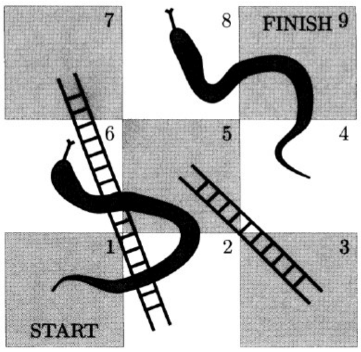
9.3 Classification des états



Classifier les états dans la chaîne dont les transitions sont données par la figure ci-dessus et où les transitions sont équiprobables pour toutes possibilités.

9.4 Jeu de serpent et échelle

Avec la carte donnée à droite, à chaque tour un joueur lance une pièce parfaite et avance 1 ou 2 places (dans l'ordre des numéros des cases) en fonction du résultat du lancement. Si on se retrouve en bas d'une échelle, on grimpe en haut ; si on se retrouve sur la tête d'un serpent, on glisse vers le bas.



1. On note $X_n\in\{1,2,\ldots,9\}$ la position du joueur à l'instant n. Donc $X_0=1$ et si on a $X_n=9$, pour un $n\in\mathbb{N}$, alors $X_k=9$, pour tout $k\geq n$. Démontrez que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov et donnez sa matrice de transition.

2. Pouvez vous classifier les états ?

3. Combien de tours en moyenne pour finir le jeu ?