TD10 M1S2 Probabilité, Martingale et chaîne de Markov

10.1 Chaîne de Markov transitoire

On considère la chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ définie par $X_{n+1} = X_n + 1$, pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est transitoire.
2. Déterminer une mesure invariante à valeurs finies pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

10.2 Convergence et mesure invariante

Soit E un espace d'états fini, et soit Q une matrice de transition sur E. On suppose qu'il existe $e \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $Q^n(e, x)$ converge vers une limite p_x.

1. Montrer que $(p_x)_{x\in E}$ est une loi de probabilité et qu'elle est invariante pour Q.
2. Montrer que ce n'est pas nécessairement vrai si E est infini.

10.3 Marche aléatoire sur $\mathbb{N}$

Soit $p \in]0, 1[$. Considérons la chaîne de Markov sur $E = \mathbb{N}$ de matrice de transition

$$\begin{aligned} Q(k, k+1) &= p = 1 - Q(k, k-1), \text{ si } k \geq 1, \\ Q(0, 1) &= 1. \end{aligned}$$

1. Montrer que cette chaîne est irréductible.
2. Dans cette question, on suppose $p = 1/2$. Montrer que la chaîne est récurrente (on pourra penser au comportement de la marche aléatoire simple).
3. On suppose maintenant que $p \leq 1/2$.
   (a) Trouver une mesure réversible par rapport à Q.
   (b) En déduire si la chaîne est récurrente positive ou nulle en fonction de p.
4. Montrer que la chaîne est transitoire ssi $p > 1/2$.
5. Calculer $\mathbb{E}_x[H_x]$, pour tout $x \in E$ et $p \in]0, 1[$, où $H_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$.

10.4 Marche simple sur le graphe cyclique

1. Soit $X = (X_n)_{n\geq 0}$, la marche simple sur $E := \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, définie par $X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$ où $\xi_i \in \{\pm 1\}$ i.i.d. avec $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = 1/2$. Montrer que X est une chaîne de Markov, et donner sa matrice de transition Q.
2. On dit que μ, une probabilité sur E, vue comme un vecteur ligne, est invariante pour X si $\mu Q = \mu$. Montrer qu'il existe une unique probabilité invariante pour X, que l'on l'explicitera.

3. Considérons les vecteurs ligne suivants:

$$\left(\cos\left(\frac{2\ell m\pi}{N}\right)\right)_{m\in E},\ 0\le \ell\le \lfloor\frac{N}{2}\rfloor,$$
$$\left(\sin\left(\frac{2\ell m\pi}{N}\right)\right)_{m\in E},\ 1\le \ell\le \lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor,$$

   Montrer qu'ils forment une base de vecteurs propres à gauche de Q, et donner les valeurs propres associées.

4. Supposons que $\mathbb{P}(X_0=0)=1$. Si N est impair et $m\in E$, montrer que $\mathbb{P}(X_n=m)$ tend vers $\mu(\{m\})$ et étudier la vitesse de convergence. En particulier, X_n converge en loi vers μ.

5. Pour N pair, X_n converge-t-elle en loi ?

6. On modifie la loi de transition en rendant la marche paresseuse : pour $\varepsilon\in]0,1[$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=X_n\mid X_n)=\varepsilon,\ \mathbb{P}(X_{n+1}=X_n\pm 1\mid X_n)=\frac{1-\varepsilon}{2}.$$

   Soit $\widetilde{Q}$ cette transition. Montrer que $\widetilde{Q}=(1-\varepsilon)Q+\varepsilon\,\mathrm{Id}$. Reprendre les questions 2) à 4) pour $\widetilde{Q}$.

10.5 Retournement du temps

Soit $(X_k)_{0\le k\le n}$ une chaîne de Markov sur E dénombrable, de matrice de transition Q et μ la loi de X_0.

1. On suppose dans cette question que μ est invariante.
   (a) Montrer que $\{x\in E:\mathbb{P}_{X_k}(\{x\})>0\}$ ne dépend pas de k.
   (b) Quitte à restreindre E, on suppose désormais que $\mu(x)>0$ pour tout $x\in E$. Montrer que

$$\widetilde{Q}(x,y)=\frac{\mu(y)}{\mu(x)}Q(y,x)$$

   est une matrice stochastique, puis que $(X_{n-k})_{0\le k\le n}$ est une chaîne de Markov de transition $\widetilde{Q}$. Quelle est sa loi initiale ?

2. On suppose dans cette question que la matrice

$$\widetilde{Q}(x,y)=\begin{cases}\frac{\mu(y)}{\mu(x)}Q(y,x) & \mu(x)>0\\ \delta_{x,y} & \text{sinon}\end{cases}$$

   est une matrice stochastique. Montrer que μ est nécessairement une mesure invariante.

3. On ne suppose plus que μ est invariante. Montrer que $(X_{n-k})_{0\le k\le n}$ est encore une chaîne de Markov mais inhomogène en temps. On précisera sa loi initiale et sa matrice de transition à tout instant $0\le k\le n-1$.